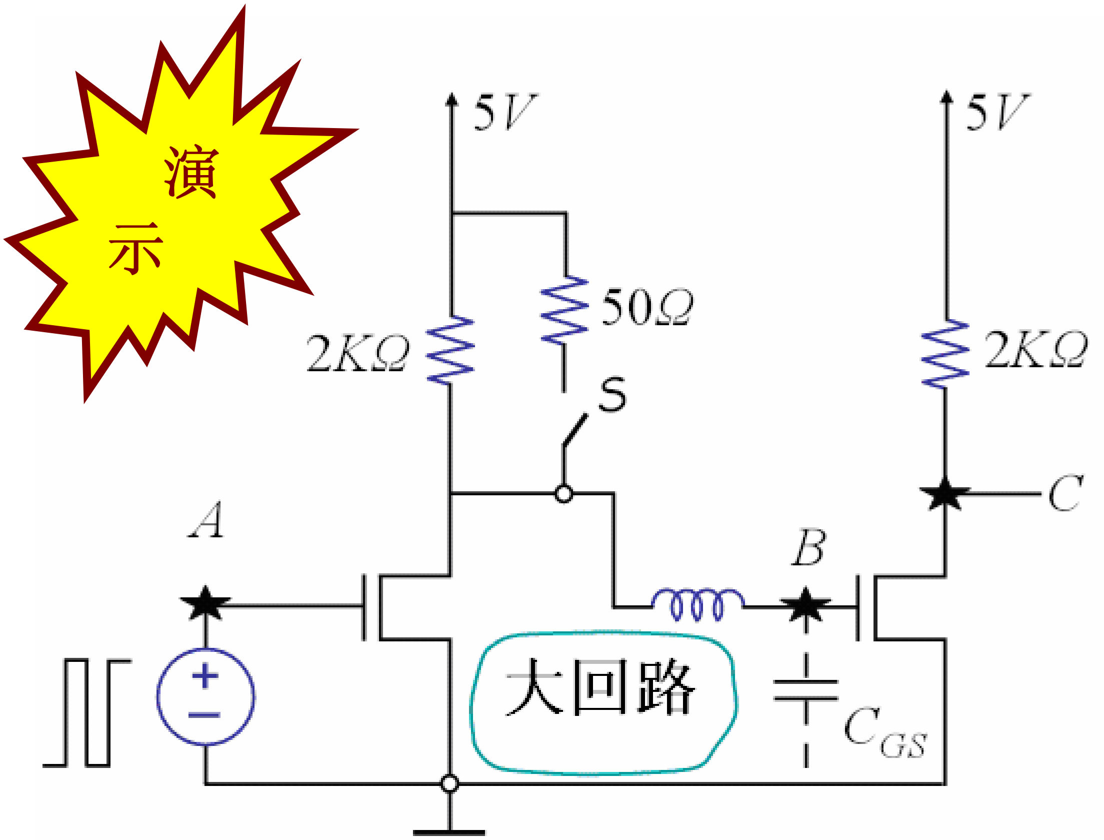
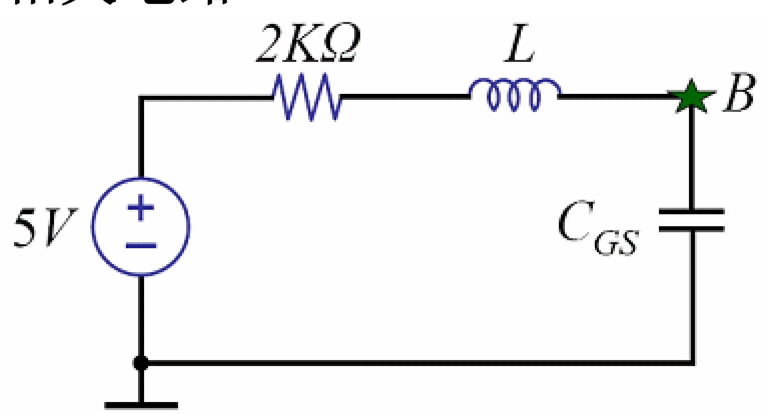
6.002 电路与电子学

二阶系统

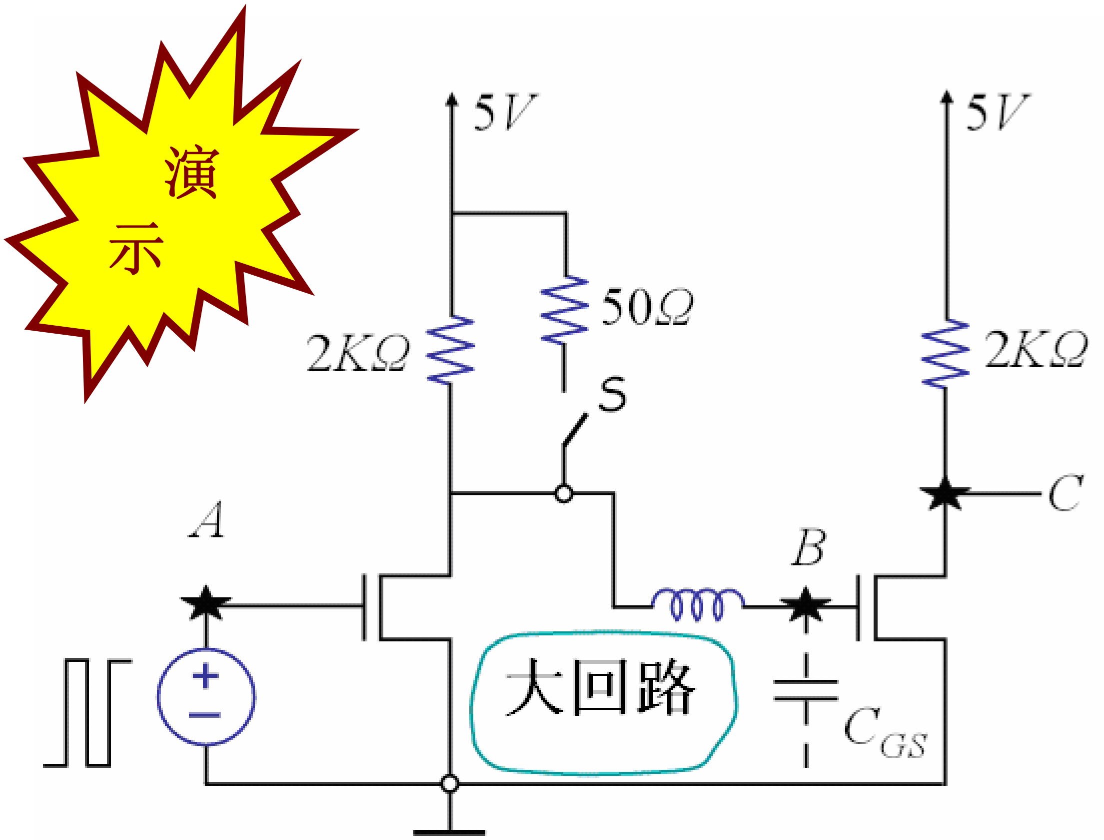
二阶系统



相关电路



二阶系统

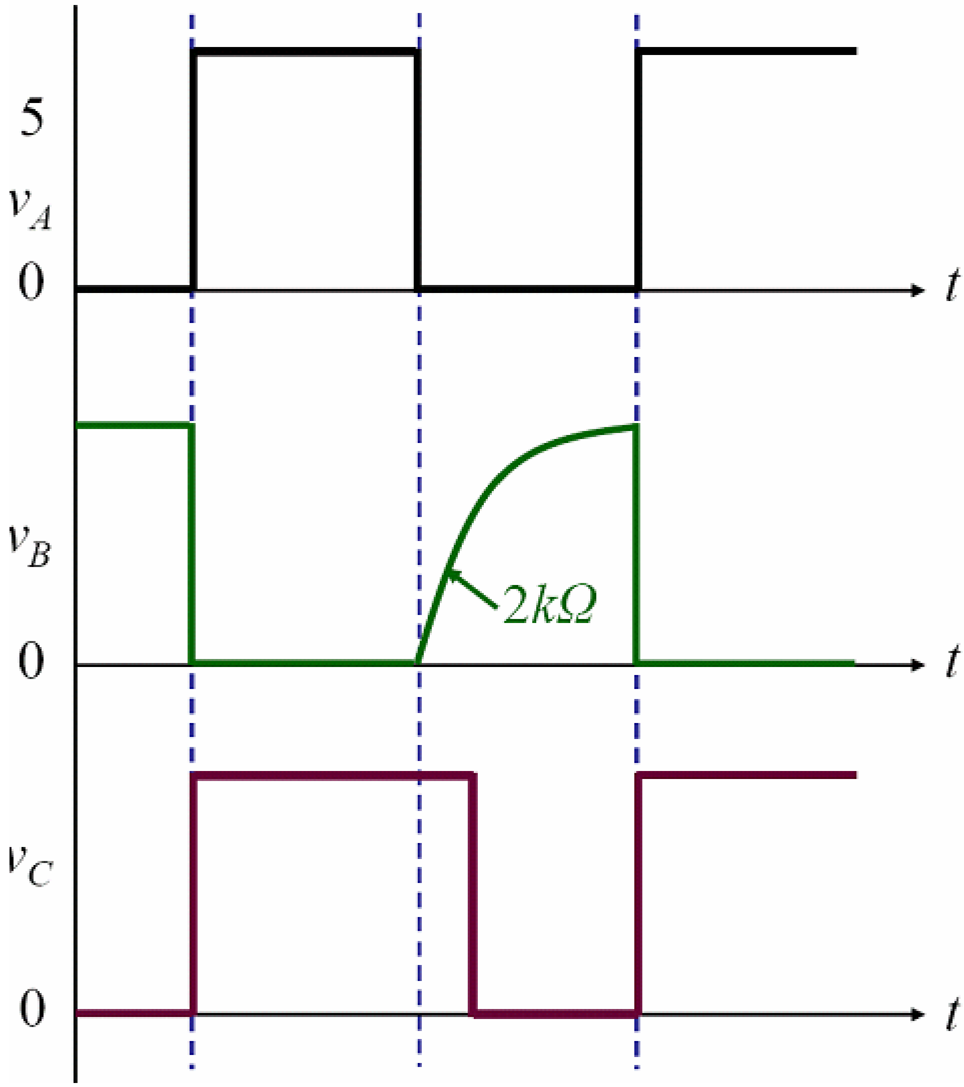


我们的老朋友反向器，驱动另一个反向器
如图所示为线路的寄生电感和MOSFET门极与源极之间的电容

[复习附录中的复数运算，为下节课做准备]

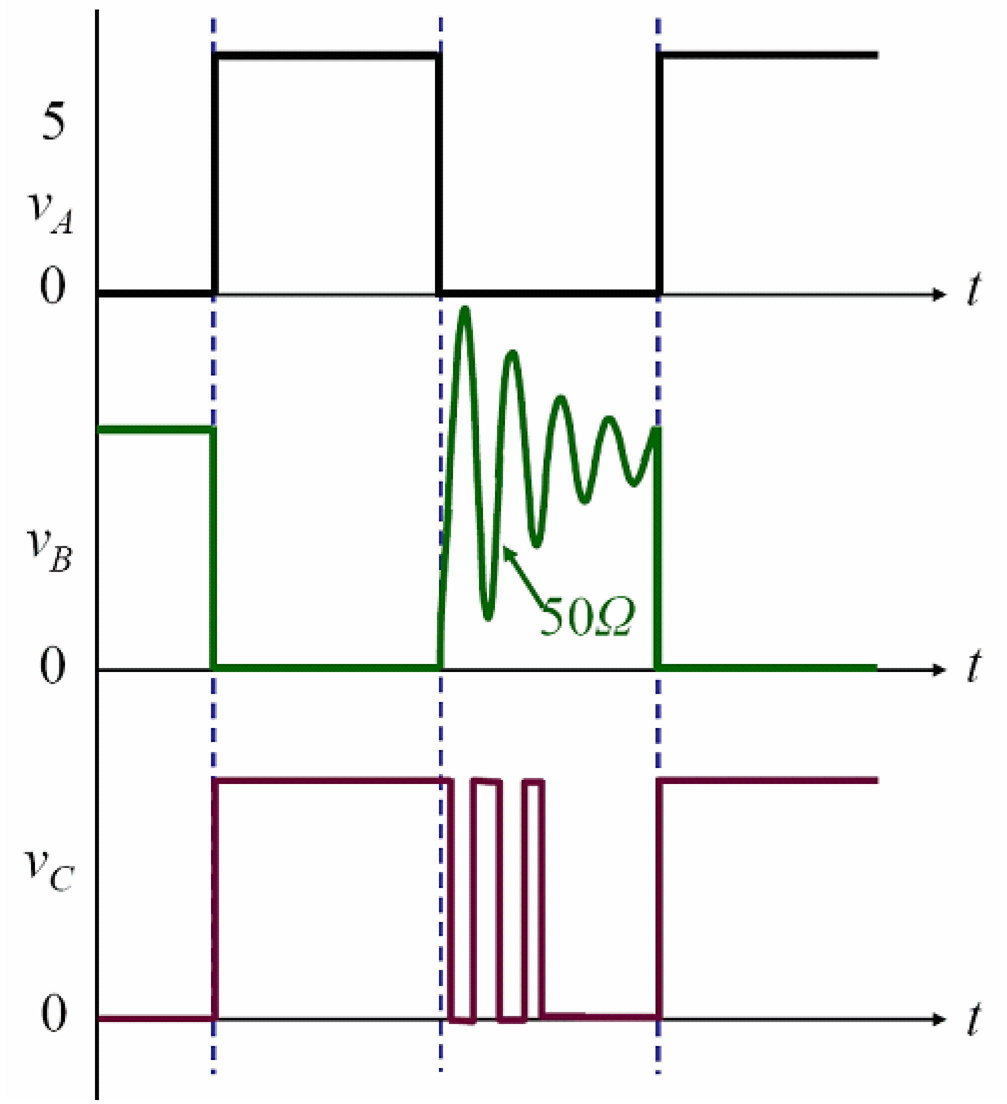
测得输出

2KΩ

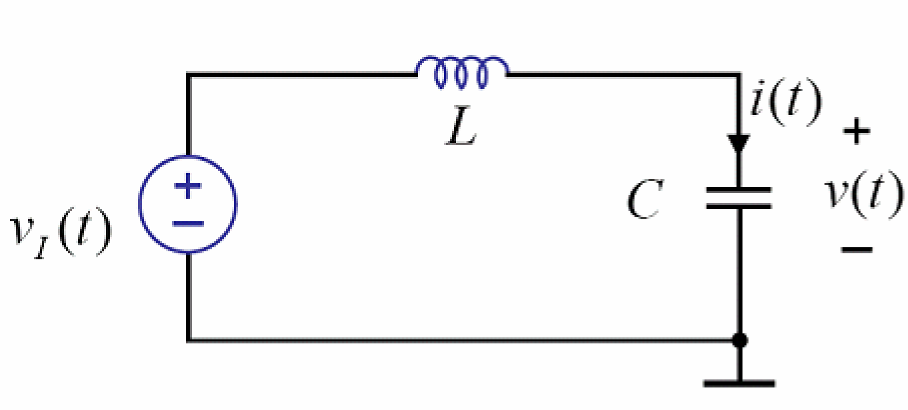


现在，我们试着通过将开关S闭合来减小有效电阻并使反相器加速。

测得输出　　50 Ω



首先我们来分析LC电路



节点法

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}(v_I - v)\,dt = C\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{1}{L}(v_I - v) = C\frac{d^2v}{dt^2}$$

$$\underbrace{LC}\frac{d^2v}{dt^2} + v = v_I$$

回想

$$v_I - v = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}(v_I - v)\,dt = i$$

二次方

V，i状态变量

求解

回想，求齐次解和特解的方法
①求出特解
②求出齐次方程的解

↓

4步法

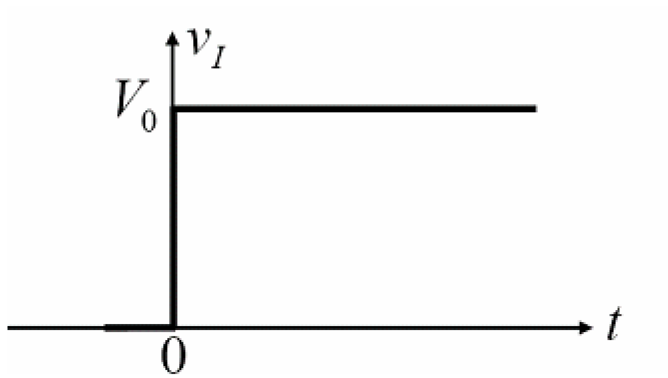
③方程的解即为特解和齐次方程的解之和
根据初始条件求解剩余常量

$$v = v_P(t) + v_H(t)$$

现在我们来求解

$$LC\frac{d^2v}{dt^2}+v=v_I$$

输入



初始条件：

$$v(0)=0 \qquad i(0)=0 \qquad [\mathrm{ZSR}]$$

① 特解

$$LC\frac{d^2v_P}{dt^2}+v_P=V_0$$

$$v_P=V_0$$ 是一个解

②齐次解

对如下方程

$$LC\frac{d^2v_H}{dt^2}+v_H=0$$

回想v_H：齐次方程的解（方程右端设为0）

4步法：

Ⓐ 按以下形式设待定解

$$v_H = Ae^{st} \qquad , A, s = ?$$

所以 $LC\cancel{A}s^2\cancel{e^{st}}+\cancel{Ae^{st}}=0$

Ⓑ

$$\left.s^2=-\frac{1}{LC}\right\} \text{特征方程}$$

Ⓒ Roots

$$s=\pm j\sqrt{\frac{1}{LC}} \qquad j=\sqrt{-1}$$

$$s=\pm j\omega_o \qquad \omega_o=\sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Ⓓ $v_H=A_1e^{j\omega_o t}+A_2e^{-j\omega_o t}$ 微分方程一般猜测法求解

③通解

$$v(t) = v_P(t) + v_H(t)$$

$$v(t) = V_0 + A_1 e^{j\omega_o t} + A_2 e^{-j\omega_o t}$$

根据初始状态求出未知常量

$v(0) = 0$

$$0 = V_0 + A_1 + A_2$$

$i(0) = 0$

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$

$$i(t) = CA_1 j\omega_o e^{j\omega_o t} - CA_2 j\omega_o e^{-j\omega_o t}$$

所以 $0 = CA_1 j\omega_o - CA_2 j\omega_o$

或 $A_1 = A_2$

$$-V_0 = 2A$$

$$A_1 = -\frac{V_0}{2}$$

故 $v(t) = V_0 - \frac{V_0}{2}\left(e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}\right)$

③通解

记住欧拉方程

$$e^{jx} = \cos x + j\sin x$$

（证明可通过泰勒公式展开）

$$\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} = \cos x$$

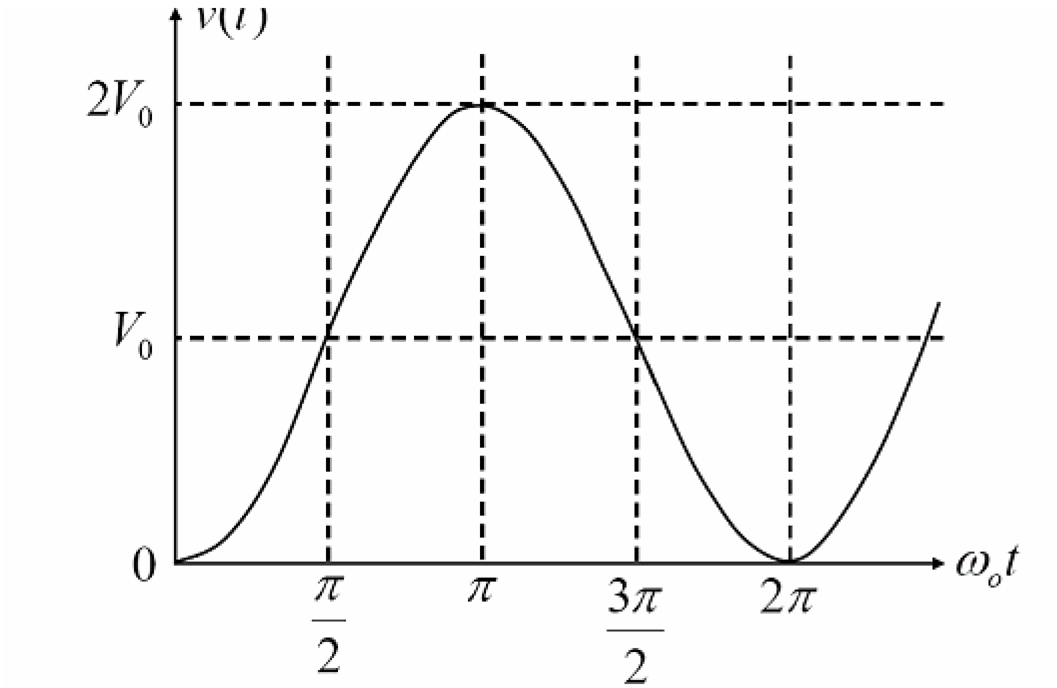
所以

$$v(t) = V_0 - V_0 \cos \omega_o t$$

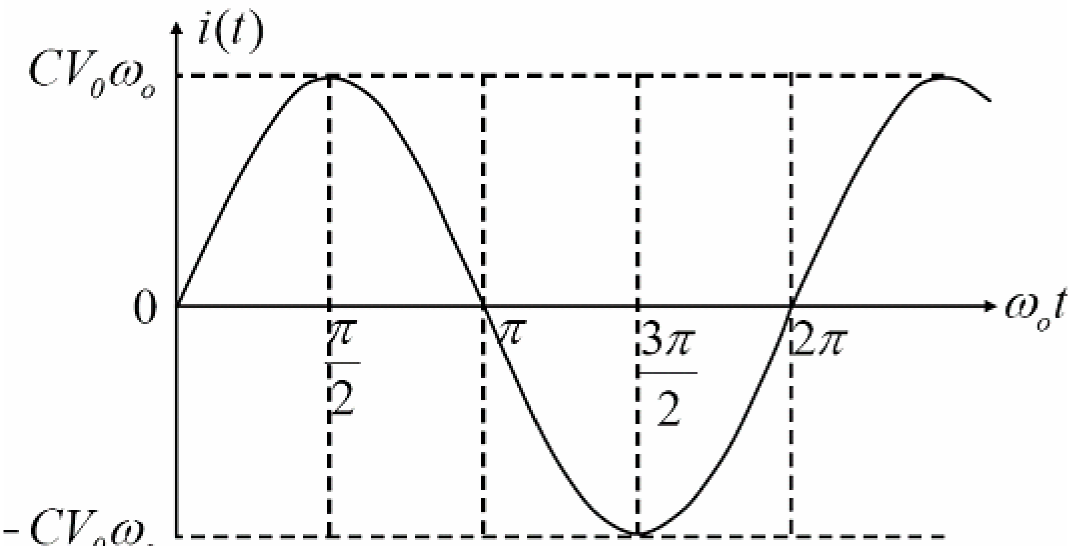
$$i(t) = CV_0\omega_o \sin \omega_o t \qquad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

输出为正弦曲线

画出通解



$v(t)$
$2V_0$
V_0
0
$\omega_o t$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π



$i(t)$
$CV_0\omega_o$
0
$\omega_o t$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
$-CV_0\omega_o$

方法总结

①利用节点法列出DE方程

②通过猜测法求出特解v_P，并验证

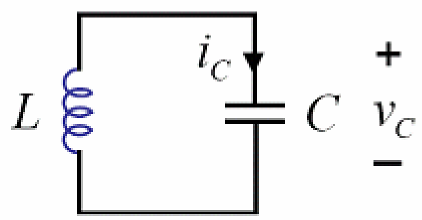
③求出齐次方程解v_H

A. 按Ae^{st}形式设待定解
B. 得到特征方程
C. 解特征方程求根s_i
D. 累加$A_i e^{s_i t}$得到v_H

④方程的通解为$v_P + v_H$
根据初始状态求得剩余常量

例

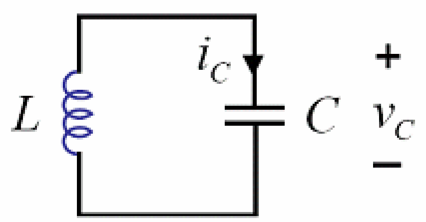
对于如图所示电路



$$v_C(0) = V$$
$$i_C(0) = 0$$

通过求解齐次方程可直接得到方程的解（V_0=0）

例：



$v_C(0) = V$

$i_C(0) = 0$

过求解齐次方程可直接得到方程的解（v_0=0）

$$v_C(t) = A_1 e^{j\omega_o t} + A_2 e^{-j\omega_o t}$$

$v_C(0) = V$

$$V = A_1 + A_2$$

$i_C(0) = 0$

$$0 = CA_1 j\omega_o - CA_2 j\omega_o$$

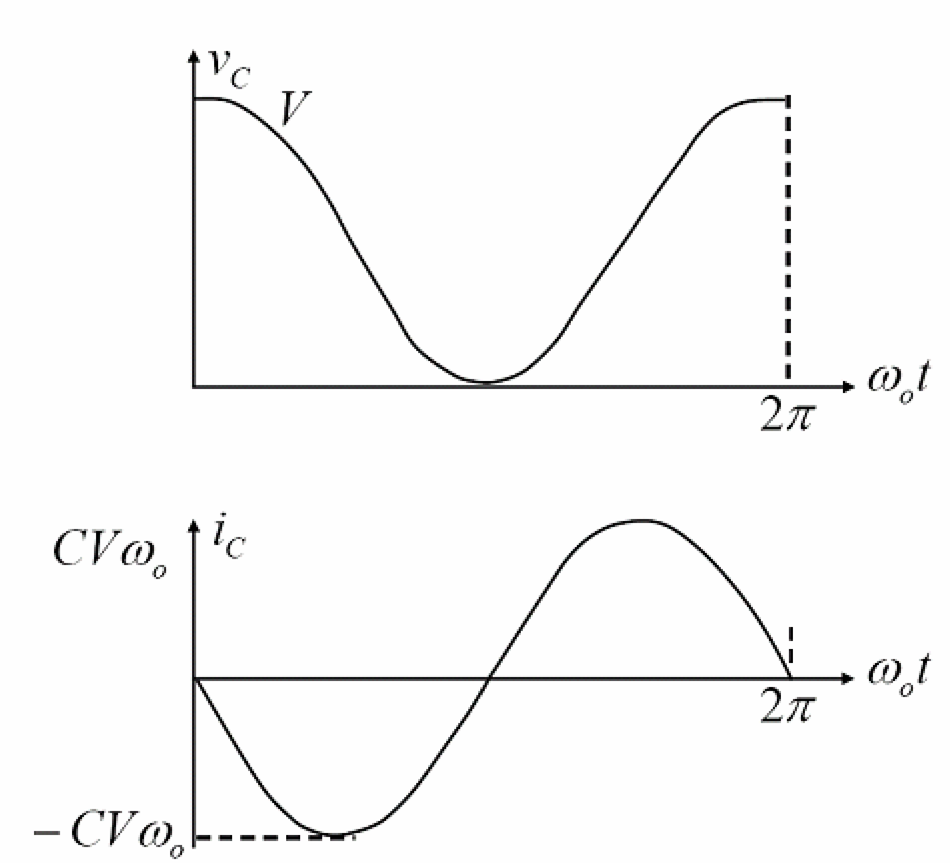
或 $$A_1 = A_2 = \frac{V}{2}$$

或 $$v_C = \frac{V}{2}\left(e^{j\omega_o t} + e^{-j\omega_o t}\right)$$

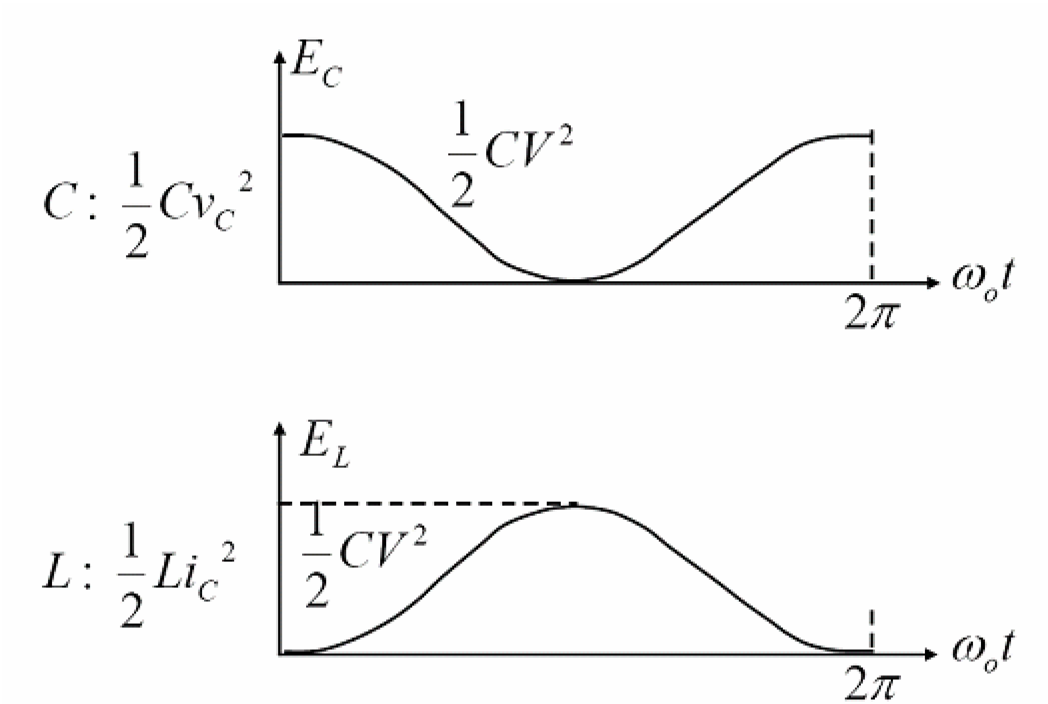
$$v_C = V\cos\omega_o t$$

$$i_C = -CV\omega_o \sin\omega_o t$$

例



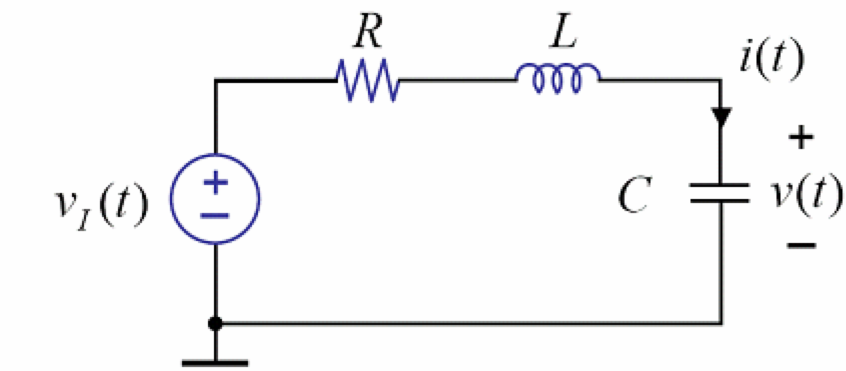
能量

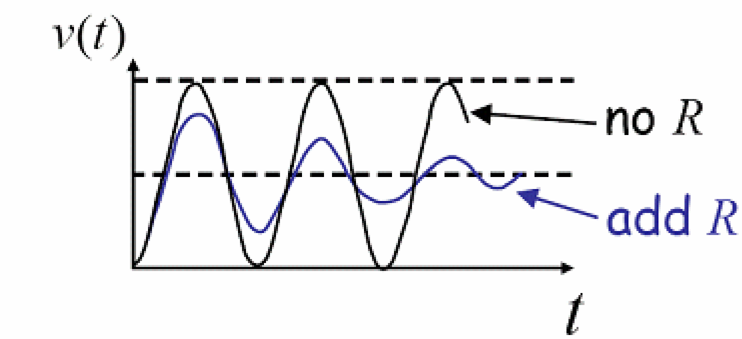


注意：$\frac{1}{2}Cv_C^{\ 2}+\frac{1}{2}Li_C^{\ 2}=\frac{1}{2}CV^2$

该系统中的总能量是个常量，但它在电容和电感之间来回转换

RLC电路





加上电阻R后的阻尼正弦曲线----记住这个例子

见A&L的13.2章