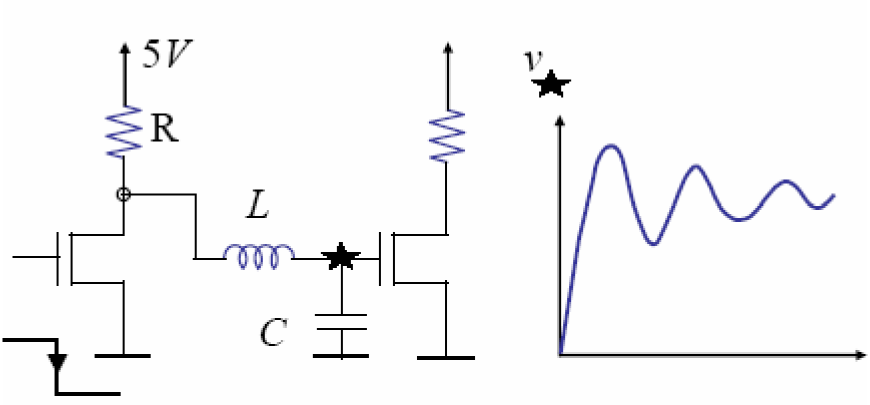
6.002 电路与电子学

正弦稳态

复习

■ 我们现在理解了



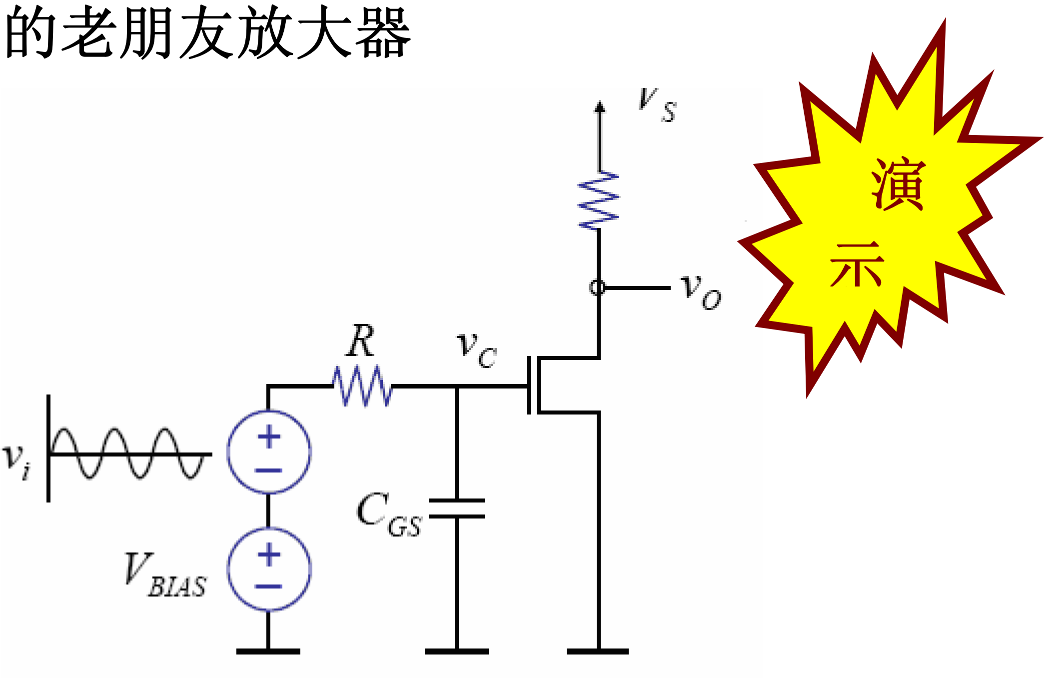
■今天，看一下电路对正弦驱动信号的响应

正弦波信号之所以重要是因为其它信号可以表示成一系列正弦信号的叠加。

各种频率正弦信号的响应——aka 频率响应——能够告诉我们更多有关系统的东西

问题的引出

为了进一步讨论，先回想一下我们的老朋友放大器



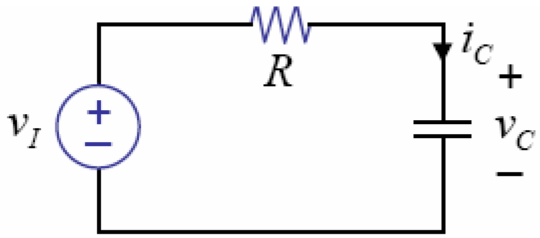
当输入 v_i 的频率改变时观察 v_0 的幅值注意到它随着频率增加而减小。

同时也观察 v_0 随着频率变化相位发生变化。

需要研究正弦驱动下的电路特性。

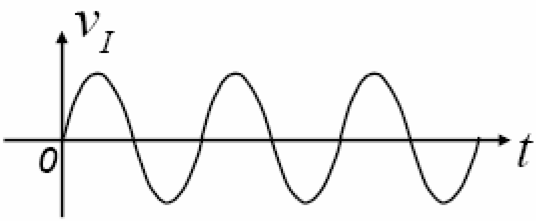
RC 电路的正弦响应

例：



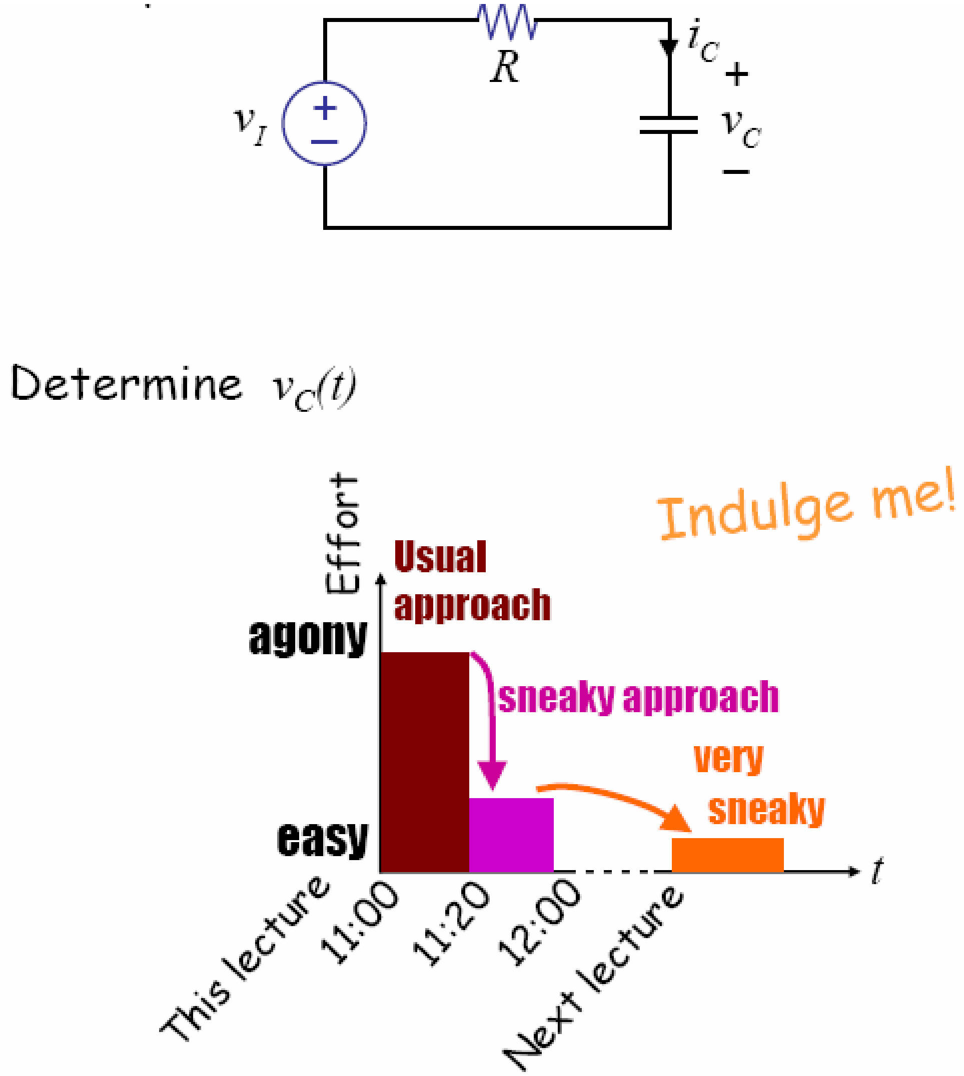
$$v_I(t) = V_i \cos \omega t \quad \text{for} \quad t \geq 0 \quad (V_i \text{ real})$$
$$= 0 \quad \text{for} \quad t < 0$$

$$v_C(0) = 0 \quad \text{for} \quad t = 0$$



我们的方法

例：



R
i_C
+
v_I
v_C
−
Determine $v_C(t)$
Indulge me!
Effort
Usual
approach
agony
sneaky approach
very
sneaky
easy
t
This lecture
11:00
11:20
12:00
Next lecture

让我们使用通常的做法…

①建立 DE 。

②求 v_p 。

③求 v_H 。

④$v_C = v_p + v_H$，使用初始条件求解未知数

通常的做法…

①建立 DE

$$RC\frac{dv_C}{dt}+v_C=v_I$$
$$=V_i\cos\omega t$$

这很容易!

②. 找到 $\boxed{v_p}$

$$RC\frac{d\boxed{v_P}}{dt}+\boxed{v_P}=V_i\cos\omega t$$

首先尝试: $\boxed{v_P}=A$　　　　不 行

第二次尝试: $\boxed{v_P}=A\cos\omega t$　　　　也不行

第三次尝试: $\boxed{v_P}=A\cos(\omega t+\phi)$ 频率

幅值　　　相位

$$-RCA\omega\sin(\omega t+\phi)+A\cos(\omega t+\phi)=V_i\cos\omega t$$

$$-RCA\omega\sin\omega t\cos\phi-RCA\omega\cos\omega t\sin\phi+$$
$$A\cos\omega t\cos\phi-A\sin\omega t\sin\phi\qquad=V_i\cos\omega t$$

●
● 啊
●

可行，但是简直太复杂

让我们用点技巧

找到另外一个输入的特解…

$$RC\frac{dv_{PS}}{dt}+v_{PS}=v_{IS}$$
$$=V_ie^{st}$$

试解

$$v_{PS}=V_pe^{st}$$

$$RC\frac{dV_pe^{st}}{dt}+V_pe^{st}=V_ie^{st}$$
$$sRCV_p\cancel{e^{st}}+V_p\cancel{e^{st}}=V_i\cancel{e^{st}}$$
$$(sRC+1)V_p=V_i$$
$$\boxed{V_p=\frac{V_i}{1+sRC}}$$

于是 $v_{PS}=\frac{V_i}{1+sRC}\cdot e^{st}$ 是 V_ie^{st} 的特解

$$\underbrace{\frac{V_i}{1+j\omega RC}}_{V_p}\cdot e^{j\omega t}$$

为 V_ie^{st} 的解此处，s 用 s= jω 替换

复数的幅值

②第四步尝试找v_p …

使用简便的方法

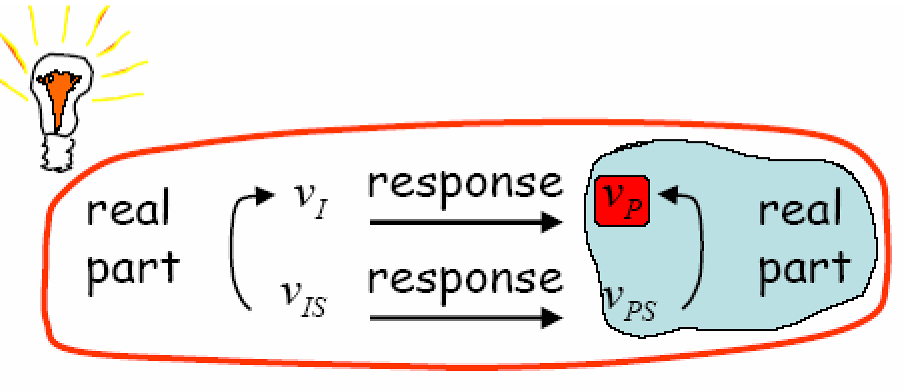
事实 1：找到 $V_i e^{j\omega t}$ 的响应是容易的。

事实 2：

$$v_I = V_i \cos \omega t = \text{real}\left[V_i e^{j\omega t}\right] = \text{real}\left[v_{IS}\right]$$

由欧拉公式有

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$



叠加原理的反向运用，

假设系统是真实、线性的。

②第四步尝试找v_p …

复数

$$\boxed{v_p} = Re\left[v_{PS}\right] = Re\left[V_p e^{j\omega t}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{V_i}{1 + j\omega RC} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left[\frac{V_i(1 - j\omega RC)}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot e^{j\omega t}\right]$$

$$= Re\left[\frac{V_i}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{j\phi} e^{j\omega t}\right], \tan\phi = -\omega RC$$

$$= Re\left[\frac{V_i}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot e^{j(\omega t + \phi)}\right]$$

$$\boxed{v_p} = \frac{V_i}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

想一下，$\boxed{v_p}$ 是$V_i \cos\omega t$的特解

③求解 v_H

回想一下有

$$v_H = Ae^{\frac{-t}{RC}}$$

④找到通解

$$v_C = \boxed{v_P} + v_H$$

$$v_C = \frac{V_i}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} cos(\omega t + \phi) + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$$where \quad \phi = tan^{-1}(-\omega RC)$$

给定

$v_C(0) = 0$ for $t = 0$

所以

$$A = -\frac{V_i}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \cos(\phi)$$

完成了！ 啊！

正弦稳态

我们通常只是对正弦量的特解感兴趣，也就是在暂态已经结束之后。

注意当

$$t \to \infty, \quad v_C \to v_P \quad \text{as} \quad e^{-\frac{t}{RC}} \to 0$$

$$v_C = \frac{V_i}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t + \phi) + A e^{-\frac{t}{RC}}$$

0

$$\text{where} \quad \phi = \tan^{-1}(-\omega RC)$$

$$A = -\frac{V_i}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} \cos(\phi)$$

V_p $\angle V_p$

描述为

SSS：正弦稳态

正弦稳态

关于 SSS 的所有信息都包含在：

V_p，中，V_p，为复数的模

回想一下：$V_p = \dfrac{V_i}{1 + j\omega RC}$

步骤③，④是浪费时间！

$$\frac{V_p}{V_i} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$\frac{V_p}{V_i} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} e^{j\phi} \text{ where}$$

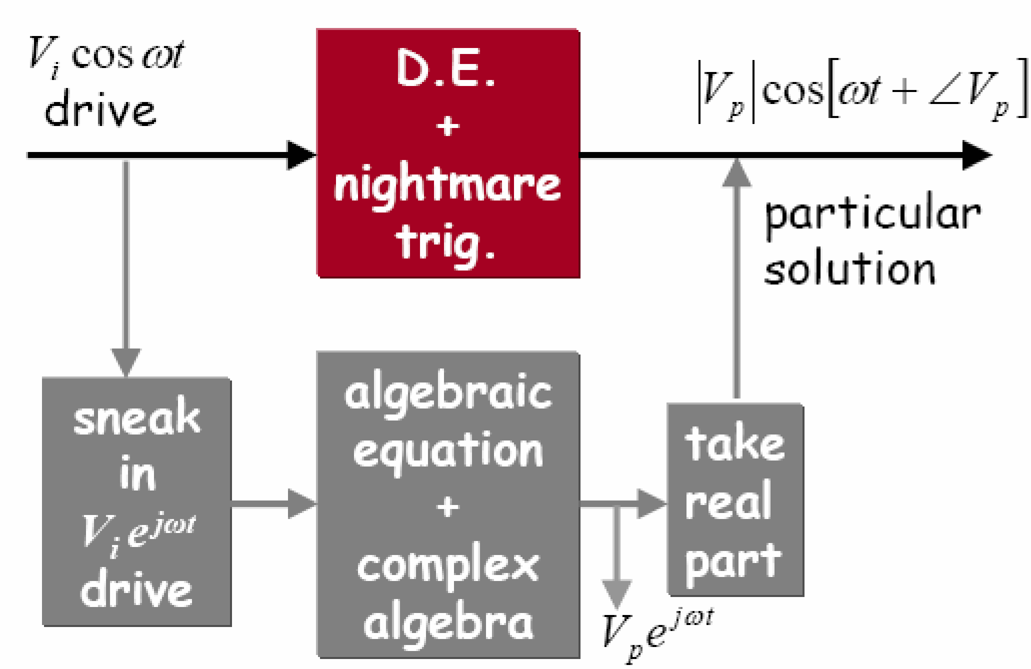
$$\phi = \tan^{-1} - \omega RC$$

模：$\left|\dfrac{V_p}{V_i}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}}$

相位ϕ：$\angle \dfrac{V_p}{V_i} = -\tan^{-1}\omega RC$

正弦稳态

使找到特解 v_P 的过程形象化如下：

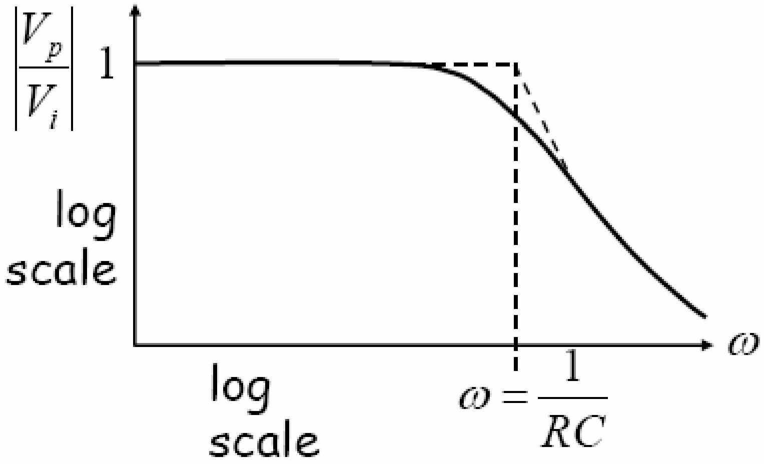


画幅值特性图

转移特性

$$H(j\omega)=\frac{V_p}{V_i}$$

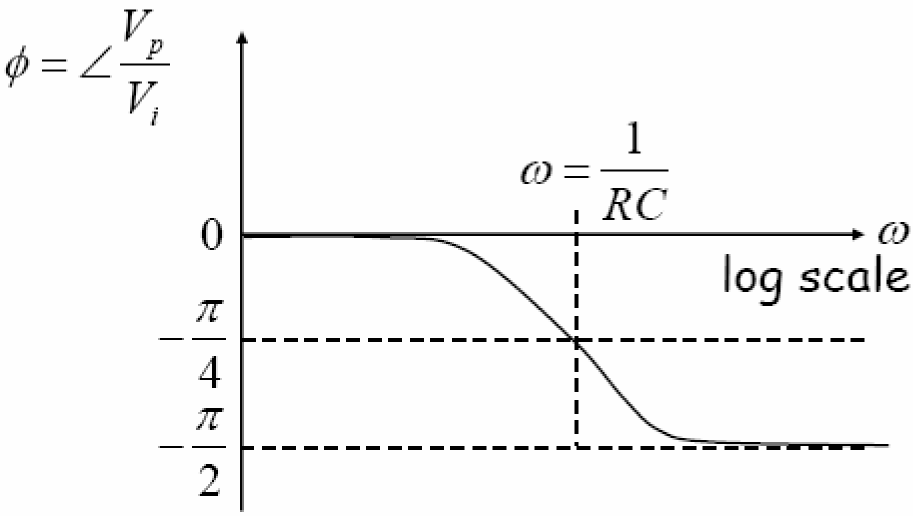
$$\left|\frac{V_p}{V_i}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$$



从示范：解释 v_o 由高的频率降落！

画相位特性

$$\phi = tan^{-1} - \omega RC$$



阅读：第 10.3 节和 11 章